

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Operações com matrizes

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule

(a) $A + B$; (b) $B - 2A$; (c) AD ; (d) DA ; (e) ACD ; (f) $\frac{1}{5}(I_2 - (DA)^2)$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $A^2 = 2A - I_2$.
 (b) Mostre que $A^3 = 3A - 2I_2$, recorrendo à alínea anterior.
 (c) Calcule B^2 e escreva B^k , $k \in \mathbb{N}$, em função de B .
 (d) Mostre que existe A' tal que $AA' = I_2$ e calcule-a.
 (e) Averigue se existe B' tal que $BB' = I_2$.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $C = ADB$ e $BA = I_2$.
 (b) Calcule C^5 , usando a alínea anterior.

4. Escolha uma maneira de ordenar as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

5. Calcule a primeira coluna e a segunda linha do produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Verifique que o produto de matrizes não é comutativo, calculando EA e AE para

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Qual o efeito na matriz A de efetuar os produtos EA e AE ?

7. Verifique que as identidades algébricas

- i. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ iii. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
 ii. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ iv. $(AB)^2 = A^2B^2$

nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Corrija os segundos membros de i – iv de forma a obter identidades verdadeiras para quaisquer $A, B \in M_n$.

8. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

(a) Se A, B, C são matrizes tais que $A + C = B + C$, então $A = B$.

(b) Se A, B, C são matrizes tais que $AB = AC$, então $A = O$ ou $B = C$.

(c) Se A é uma matriz tal que $A^2 = I_n$, então $A = I_n$ ou $A = -I_n$.

9. Se $A \in M_n$ satisfaz $AA^T = O$, mostre que $A = O$.

10. Averigue se são fechados em relação à adição e à multiplicação escalar os subconjuntos de M_n das matrizes

i. triangulares superiores;

ii. triangulares;

iii. simétricas (uma matriz A diz-se *simétrica* se $A = A^T$);

iv. $X \in M_n$ tais que $AX = O$, sendo $A \in M_n$ uma matriz fixa não nula;

v. $X \in M_n$ tais que $AX = I_n$, sendo $A \in M_n$ uma matriz fixa não nula.

11. Seja $A \in M_{m \times n}$ uma matriz de colunas C_1, C_2, \dots, C_n e

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n \times 1}.$$

Verifique que

$$AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n.$$

12. Usando o exercício anterior, calcule AX , quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

13. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes na forma escalonada por linhas:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine matrizes equivalentes por linhas às matrizes dadas que estejam:

i. na forma escalonada por linhas;

ii. na forma escalonada por linhas reduzida.

Sistemas de equações lineares

14. Resolva, quando possível, os seguintes sistemas, usando o método de eliminação de Gauss (ou Gauss-Jordan).

$$(a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2 \\ x_4 + x_5 & = -1 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} x_1 & & + 2x_3 & - 4x_4 & + x_5 & = 1 \\ & + 2x_2 & - x_3 & & - x_5 & = -3 \\ x_1 & - x_2 & + 2x_3 & - 3x_4 & & = 1 \\ 2x_1 & - x_2 & + 3x_3 & - 5x_4 & + 3x_5 & = 2 \end{cases}.$$

15. Sejam

$$M = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se possível, escreva M e N como combinação linear de A, B, C .

16. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(a) não tem solução; (b) tem exatamente uma solução; (c) tem uma infinidade de soluções.

17. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema em função de β .

(b) Considere o sistema homogêneo associado a $\beta = 0$ e determine a sua solução.

18. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais.

(a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é:

i. possível determinado; ii. impossível.

(b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

19. Considere o sistema de equações lineares associada à seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - 1 & \alpha & \alpha - 2 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha - 3 \end{array} \right].$$

Discuta o sistema em função do parâmetro α e apresente as correspondentes soluções (caso existam).

20. Considere o seguinte sistema, nas variáveis x, y e z , com parâmetros reais a, b, c :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + 3z = b \\ 4x + y + 5z = c \end{cases}.$$

Verifique que o sistema é possível se e só se $2a + b - c = 0$.

21. Considere o sistema representado matricialmente por $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, para que valores do parâmetro α o sistema é

(a) impossível; (b) possível e determinado, (c) possível e indeterminado.

22. Seja A uma matriz qualquer. Se C é uma coluna de A , mostre que o sistema $AX = C$ é possível e indique uma sua solução.

Matriz inversa

23. Averigue se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

são singulares.

24. Determine as inversas das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

25. Encontre todos os valores de α para os quais

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

é invertível.

26. Determine a matriz M que satisfaz a equação matricial $AMA = B$, sabendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

27. Resolva a seguinte equação matricial relativamente à matriz X :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

28. Se A, B são matrizes invertíveis, satisfazendo $(AX^T)^T = B$, escolha a afirmação correta:

$$(a) X = B(A^{-1})^T; \quad (b) X = (A^T)^{-1}B; \quad (c) X = A^T B^{-1}; \quad (d) X = A^{-1}B^T.$$

29. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

resolva as seguintes equações matriciais relativamente à matriz X :

$$(a) ((B^{-1})^T X)^{-1} A^{-1} = I_3;$$

$$(b) (C^T D^T X)^T = E.$$

30. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 5x + y + 4z = 1 \end{cases}.$$

(a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado. Indique a sua solução, usando a alínea anterior.

31. Seja $A \in M_n$ tal que $A^4 = O$. Mostre que $(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)(I_n + A^2)$.

32. Dada $A \in M_n$, supondo que existe um número natural k tal que $A^k = O$, mostre que $I_n - A$ é invertível, sendo

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

33. Usando o exercício anterior, calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

34. Se $A, B \in M_n$ são matrizes invertíveis, mostre que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.

35. Se $A, B \in M_n$, verifique que $A(I_n - BA)^{-1} = (I_n - AB)^{-1}A$.

36. Uma matriz diz-se *ortogonal* se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Mostre que

- (a) o produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal;
- (b) a inversa de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

Espaço das colunas, espaço das linhas, espaço nulo, característica e nulidade

37. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que B pertence ao espaço das colunas de A e determine X de modo que $AX = B$.
- (b) Justifique se B se escreve como combinação linear das colunas de A de forma única ou de mais do que uma forma.
- (c) Determine o espaço nulo e a nulidade de A .

38. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine as características das matrizes ampliadas $[A | B]$ e $[A^T | C]$.
- (b) Determine o espaço nulo e a nulidade de A .
- (c) Confirme que $\text{car } A = \text{car } A^T$. Averigue se $\text{nul } A = \text{nul } A^T$.
- (d) Indique, justificando, se $B \in \mathcal{C}(A)$ e se $C \in \mathcal{L}(A)$.
- (e) Determine o conjunto de todas as soluções do sistema $A^T X = C$.
- (f) Escreva C como combinação linear das colunas de A^T de mais do que uma forma.
- (g) Mostre que C escreve-se como combinação linear das colunas 1 e 2 de A^T de forma única.
- (h) Confirme que o espaço das linhas de A coincide com o espaço das linhas de \tilde{A} e apresente-o.
- (i) Determine o espaço das colunas de A e compare-o com o espaço das colunas de \tilde{A} .

39. Se A e \tilde{A} são matrizes equivalentes por linhas, verifica-se que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\tilde{A})$ e $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\tilde{A})$. Podemos também afirmar que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(\tilde{A})$? Justifique.

40. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas, o espaço nulo, a característica e a nulidade das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

41. Se $A \in M_{m \times n}$ e $B \in M_{n \times p}$, mostre que o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A .

Aplicações das Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

42. Um saco contém 200 moedas e notas no valor de 400 euros. Todas as moedas são de 1 euro e todas as notas são de 5 euros. Quantas moedas e quantas notas existem no saco?
43. Uma herança de 134 mil euros deve ser repartida por três herdeiros. O primeiro deve receber mais 40 mil euros do que o segundo e este mais 20 mil euros do que o terceiro. Quanto recebe cada um dos herdeiros?
44. Uma unidade de torrefação de café está interessada em testar uma mistura de três tipos de grãos para obter um lote final de 4500 kg com um custo de 17500 euros. O primeiro tipo de grão custa 410 cêntimos por kg, enquanto o segundo custa 440 cêntimos por kg e o terceiro 375 cêntimos por kg. Na confeção do lote é necessário que as quantidades utilizadas do primeiro e segundo tipos de grão sejam iguais. Verifique se é possível obter o lote anteriormente referido.
45. Na combinação de carbonato de cálcio, Na_2CO_3 , com vapor de bromo, Br_2 , obtém-se brometo de sódio, $NaBr$, bromato de sódio, $NaBrO_3$, e dióxido de carbono, CO_2 :



- (a) Determine, se possível, o número de moles de moléculas dos dois reagentes necessários à obtenção de dez moles de moléculas de brometo de sódio, $NaBr$.
- (b) Quantas moles de moléculas de bromato de sódio, $NaBrO_3$, e de dióxido de carbono, CO_2 , obtemos na produção de dez moles de moléculas de brometo de sódio?

Nota: Uma mole de moléculas são 6×10^{23} moléculas.

46. O vidro é um produto inorgânico, de fusão, que foi arrefecido até atingir a rigidez, sem formar cristais. O elemento básico do vidro é a sílica. Na sua composição entram outros componentes com propriedades importantes. A alumina melhora as propriedades de resistência mecânica do vidro, os óxidos de cálcio e de magnésio melhoram a durabilidade do vidro e o óxido de sódio ajuda a diminuir o ponto de fusão do vidro. Pretende-se produzir vidro com a seguinte composição: 72% de sílica, SiO_2 , 1,5% de alumina, Al_2O_3 , 9% de óxido de cálcio, CaO , 3% de óxido de magnésio, MgO , e 14,5% de óxido de sódio, Na_2O . As matérias-primas a utilizar são areia, feldespato, dolomite, calcário e soda calcária. A tabela seguinte mostra a composição das matérias-primas em função dos componentes necessários (% peso).

	SiO_2	Al_2O_3	CaO	MgO	Na_2O
areia	0,995	0,005			
feldespato	0,69	0,18	0,02		0,11
dolomite			0,31	0,21	
calcário			0,5	0,05	
soda calcária					0,585

Determine a quantidade de cada matéria-prima necessária para produzir 100 kg de vidro.

47. O Sr. Silva é dono de um pinhal que explora para produção de árvores de Natal. O corte das árvores para venda é feito no início de dezembro. As árvores estão catalogadas em seis classes, c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 e c_6 , consoante o seu tamanho, sendo a configuração inicial do pinhal (o número de árvores em cada classe) a indicada na primeira tabela abaixo. Por cada árvore cortada é semeada uma nova. Supõe-se que não há perdas de árvores durante o seu crescimento. Num período de crescimento (de janeiro a dezembro de cada ano), em cada classe, uma fração das árvores cresce o suficiente para passar a pertencer à classe seguinte, enquanto a restante continua na mesma classe. A fração de árvores da classe c_i que cresce o suficiente para passar para a classe c_{i+1} é g_i , $i = 1, \dots, 5$. Esses valores são dados pela segunda tabela abaixo.

	altura	n.º de árvores		
c_1	menor que 50 cm	800	g_1	0,28
c_2	de 50 cm a 1 m	600	g_2	0,31
c_3	de 1 m a 1,3 m	600	g_3	0,25
c_4	de 1,3 m a 1,7 m	500	g_4	0,23
c_5	de 1,7 m a 2 m	200	g_5	0,37
c_6	maior que 2 m	100		

O Sr. Silva pretende implementar uma floresta sustentável, isto é, pretende que a configuração do pinhal após o corte e plantação de novas árvores seja igual à configuração inicial. Determine o número de árvores a cortar em cada classe.